# „Dynamische Systeme II"

## §1. Himmelsmechanik

29.4.22 (1)

(1.1) Erinnerung. (a) Sei $N \in \mathbb{N}$ und $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{R}_+$. Sei

$$Q = \{ x = (x_j)_{j=1}^N \in (\mathbb{R}^3)^N = \mathbb{R}^{3N} : x_j \neq x_k, \ \forall 1 \leq j < k \leq n \} \subseteq \mathbb{R}^{3N} \text{ offen}$$

und $V : Q \longrightarrow (-\infty, 0)$,

$$V(x) = -\sum_{1 \le i < j \le N} \frac{m_i m_j}{\| x_i - x_j \|} .$$

Dann ist das N-Körperproblem (mit Massen $m_1, \dots, m_N > 0$) gegeben durch

$$(N) \qquad m_j \ddot{x}_j = -D_{x_j} V(x) \,, \quad j = 1, \dots, N$$

(b) Hatten bereits gesehen: (N) hat keine Gleichgewichtslagen

(c) Hatten auch gesehen: Liegen Komponenten $x_j^0, \dot{x}_j^0 \in \mathbb{R}^3$ einer Anfangslage $(x^0, \dot{x}^0) \in \Omega := Q \times \mathbb{R}^{3N}$ alle in einer Ebene $E \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$E = p + W \quad , \quad W \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ 2-dim. Unterraum},$$

d.h.:

$$x_j^0 \in E, \quad \dot{x}_j^0 \in W \qquad (j = 1, \dots, N),$$

so liegen die Komponenten $\alpha \cdot I(x_0, \dot{x}_0) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ der Lösungskurve $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N$ von (N) zum Anfang $(x^0, \dot{x}^0)$ ganz in der Ebene $E$, $\alpha_j(t) \in E$, $\forall t \in I(x_0, \dot{x}_0)$.

(d) Nach einer ~~orthogonale KO-Transformation~~ Bewegung im $\mathbb{R}^3$,

$$x = Ay + b, \quad \dot{x} = A\dot{y},$$

$A \in O(3)$, $b \in \mathbb{R}^3$, kann man annehmen, dass

$$E = \mathbb{R}^2 \times \{0\} = W,$$

weil (N) unter $(y,\dot{y}) \to (x,\dot{x})$ invariant bleibt.
Führe daher in $\mathbb{R}^2$ komplexe Koordinaten

$$z_j = (x_j)_1 + i(x_j)_2 \qquad (j = 1, \dots, N)$$

ein und verwende die Wirtinger-Ableitungen

$$D_{z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j^1} - i\frac{\partial}{\partial x_j^2}\right),$$

$$D_{\bar{z}_j} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j^1} + i\frac{\partial}{\partial x_j^2}\right), \quad (j = 1, \dots, N)$$

um die Dgl. für das ebene N-Körperproblem zu erhalten:

$$Q := \{ (z_j)_{j=1}^N \in \mathbb{C}^N : z_j \neq z_k,\ 1 \leq j < k \leq N \}$$

und $V : Q \to (-\infty, 0) \subseteq \mathbb{C}$,

$$V(z) = - \sum_{1 \le j < k \le N} \frac{m_j m_k}{|z_j - z_k|} .$$

Dann ist:

$$m_j \ddot{z}_j = m_j \ddot{x}_j^1 + i m_j \ddot{x}_j^2 = -D_{x_j^1} V(x) - i D_{x_j^2} V(x)$$

$$= -2 D_{\bar{z}_j} V(z), \qquad (*)$$

$j = 1, \dots, N$, die Dgl. für das ebene $N$-Körperproblem.

(e) Versuchen wenigstens mal eine Lösung von (*) (bei beliebigem $m = (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{R}_+^n$) zu finden!

(1.2) Zentralkonfigurationen im 2-Körperproblem.

(i) Im Fall $N=2$ (mit Massen $m_1, m_2 > 0$) gilt: Im Fall, dass der Schwerpunkt o.E. im Nullpunkt ruht,

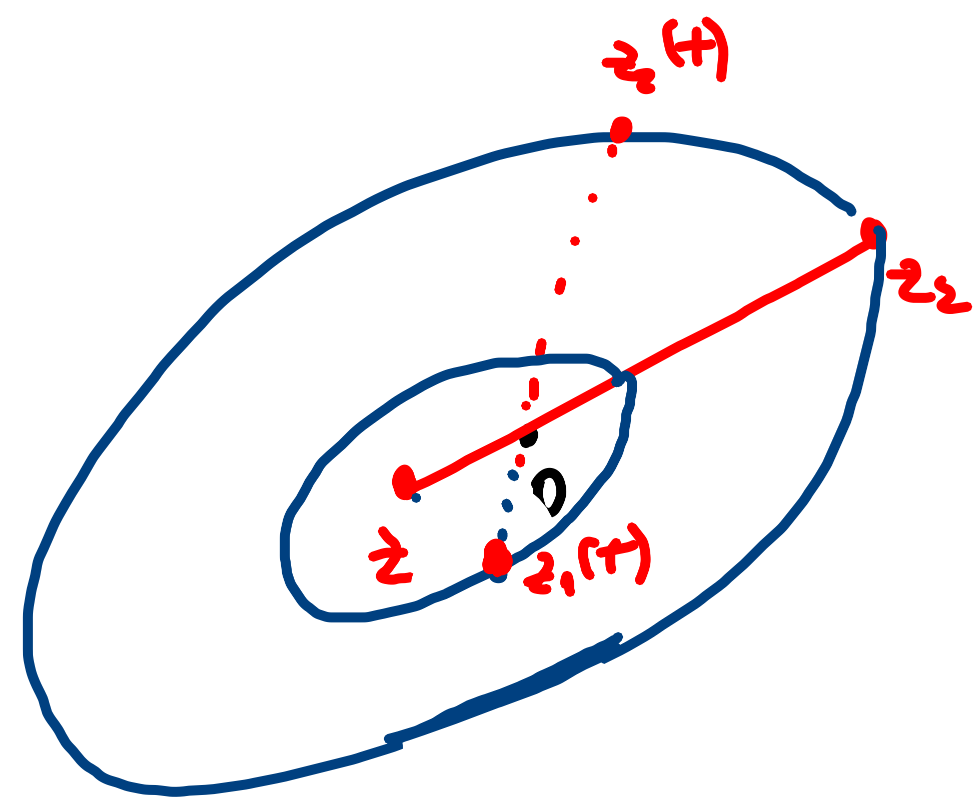
$$S = \frac{1}{M}(m_1 z_1 + m_2 z_2) \quad , \; M := m_1 + m_2 \quad :$$

$$z_1(t) = -\frac{m_2}{M} z(t), \quad z_2(t) = +\frac{m_1}{M} z(t),$$

wo $t \mapsto z(t)$ die Keplergleichung

$$\text{(K)} \qquad \ddot{z} = -M \frac{z}{|z|^3}$$

erfüllt. Die einfachsten Lösungen der Keplergleichung (K) sind aber, wie wir wissen, die gleichförmigen Kreisbewegungen




$$z(t) = r e^{i\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R} = I(z_0, \dot{z}_0)$$

mit Radius $r>0$ und Frequenz $\omega>0$.
Hierbei ist wegen

$$\dot z = i\omega r e^{i\omega t}, \quad \ddot z = (i\omega)^2 r e^{i\omega t} = -\omega^2 r e^{i\omega t}$$

und

$$-M\frac{z}{|z|^3} = -M\,\frac{r e^{i\omega t}}{r^3} = -\frac{M}{r^2}e^{i\omega t}:$$

$$r(-\omega^2) = -M\frac{1}{r^2} \iff M = r^3\omega^2$$

(3. Keplergesetz: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ : $\frac{r^3}{T^2} = \frac{M}{4\pi^2} = \text{const}$ ).

Wir halten fest: Zu jedem Paar $(m_1, m_2) \in \mathbb{R}_+^2$ und jedem $\omega > 0$ gibt es eine Lösung des 2-Körperproblems mit Massen $m_1, m_2$, die ~~gleichförmig~~ kreisförmig mit Frequenz $\omega > 0$ um den Schwerpunkt $S = 0$ rotiert. Der Radius ist dabei durch die Keplersche Bedingung

$$M = r^3 \cdot \omega^2$$

gegeben. Wir nennen $(z_1, z_2) = \left(-\frac{m_2}{M} r, + \frac{m_1}{M} r\right)$ eine Zentralkonfiguration (ZK) des 2-Körperproblems.

(ii) Interpretation. Würde man in ein (mit $\omega > 0$) rotierendes Koordinatenwechseln,

(KO) $$z = e^{i\omega t} \cdot w \,, \quad \dot{z} = i\omega e^{i\omega t} \cdot \dot{w} \,,$$

so wäre in dem neuen $w$-System $(w_1, w_2) = \left(-\frac{m_2}{M} r, \frac{m_1}{M} r\right)$ eine Gleichgewichtslage in dem transformierten System.

Vorsicht: Der Koordinatenwechsel (KO) wird nicht die Dgl. des $N$-Körperproblems erhalten. Physiker sagen: Das $w$-System ist kein Inertialsystem mehr.

<u>Idee.</u> Transformiere das ganze ebene N-Körperproblem in rotierende Koordinaten (mit Frequenz $\omega > 0$) und suche dann nach Gleichgewichtslagen $(w_1, \dots, w_N) \in Q$. Dann wäre

$$z_j(t) = w_j e^{i\omega t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, N,$$

(ebene) Lösungen des N-Körperproblems (so genannte Zentralkonfiguration). Diese wären dann in gewisser Weise die einfachsten Lösungen von (N).

(1.3) Zentralkonfigurationen im N-Körper-problem

Mit

$$z_j = w_j e^{i\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ist zunächst

$$|z_j - z_k| = |w_j e^{i\omega t} - w_k e^{i\omega t}| = |w_j - w_k| \cdot \underbrace{|e^{i\omega t}|}_{=1}$$

$$= |w_j - w_k|$$

für die rechte Seite von (N) erhalten wir also

$$-2 D_{\bar{z}_j} V(z) = -2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \frac{m_j m_k}{|z_j - z_k|^3} (z_j - z_k)$$

$$= -2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \frac{m_j m_k}{|w_j - w_k|^3} (w_j - w_k) \cdot e^{i\omega t}$$

$$= -2 D_{\bar{w}_j} V(w) \cdot e^{i\omega t},$$

da

$$V(z) = - \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{|z_j - z_k|} = - \sum_{j \neq k} \frac{m_j m_k}{|w_j - w_k|}$$

$$= V(w).$$

Nun zu linken Seite:

$$z_j = w_j e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{z}_j = \dot{w}_j e^{i\omega t} + w_j (i\omega) e^{i\omega t} = (\dot{w}_j + (i\omega) w_j) e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{z}_j = (\ddot{w}_j + (i\omega)\dot{w}_j + (i\omega)\dot{w}_j + (i\omega)^2 w_j) e^{i\omega t}$$

$\Rightarrow$

$$m_j \ddot{z}_j = m_j (\ddot{w}_j + 2i\omega \cdot \dot{w}_j - \omega^2 w_j) e^{i\omega t}$$

$$= -2 D_{\bar{z}_j} V(z) = -2 D_{\bar{w}_j} V(w) e^{i\omega t}$$

$\Rightarrow$

$$m_j \ddot{w}_j + 2 i m_j \omega \cdot \dot{w}_j - m_j \omega^2 w_j = -2 D_{\bar{w}_j} V(w)$$

Bringt man nun den 2. und 3. Summanden auf die rechte Seite, so kann man dies als „Scheinkräfte" interpretieren, die auf den j. Körper wirken. Man erhält so:

$$(**) \quad m_j \ddot{w}_j = \underbrace{-2 D_{\bar{w}_j} V(w)}_{\substack{\uparrow \\ \text{„Grav.-kraft"}}} \underbrace{- 2 i m_j \omega \cdot \dot{w}_j}_{= \text{„Corioliskraft"}} + \underbrace{m_j \omega^2 \cdot w_j}_{\text{„Zentrifugalkraft"}}$$

Eine Gleichgewichtslösung $(w, \dot{w})$ von (**) erfüllt natürlich $\dot{w} = 0$, weshalb dort keine Corioliskraft wirkt. In so einem $w \in Q$ müssen dann also Gravitationskraft + $2 D_{\overline{w_j}} V(w)$ und Zentrifugalkraft $m_j \omega^2 z_j$ im Gleichgewicht sein,

$$2 D_{\overline{w_j}} V(w) = m_j \omega^2 z_j \qquad (j = 1, \ldots, N)$$